Данная серия методичек по электроду посвящается лучшему семинаристу по электроду

Семинарист: Student_name, не пойдёте решать 26.1?
Student_name: Нет.
Семинарист: Но это же утешительная задача.
Student_name: Я не хочу утешаться!

Мы продолжаем изучать стационарные токи. На этот раз поговорим про индукцию.

Понятие индукции достаточно абстрактное. Забудьте школьное определение через магнитный поток, сейчас будем определять по-новому.

Представим себе контур, по которому мы пустили ток I. Мы хотим подсчитать энергию в некоторой области.
Замечание. Ток Чугреев обозначает как J, мне привычнее I. Выбирайте как хотите.

***Определение индуктивности L, которое мы будем использовать при решении задач:***
***L является коэффициентом пропорциональности в законе***
$W = LI^2/2c^2$.

Обращаю ваше внимание, что не как вас учили в школе:
$W = LI^2/2$

Откуда берётся $c^2$? Из-за кривого определения I (и **j**). По определению $I = \frac{dq}{dt}$, а лучше было бы $I = \frac{dq}{dct}$ . Так мы получим силу тока в с раз меньше: $\frac{I}{c}$.
Именно $\frac{I}{c}$ (и $\frac{j}{c}$) будет постоянно болтаться в формулах:

$$W = \frac{L\left(\frac{I}{c}\right)^2}{2}$$

Если обозначить $\frac{I}{c}$ за новую переменную, было бы проще, но так исторически сложилось ☹

Достаточно логичная формула: чем больше ток, тем больше энергия. И т.к. H~I, то логично предположить, что энергия, где H под интегралом в квадрате, будет $\sim I^2$.

А как мы будем считать энергию? Энергия содержится в магнитном поле, т.е. мы её будем считать как интеграл по объёму

$$\mathcal{E} = \int \frac{\vec{H}\vec{B}}{8\pi} dV \underset{\mu=1}{=} \int \frac{\vec{H}^2}{8\pi} dV$$

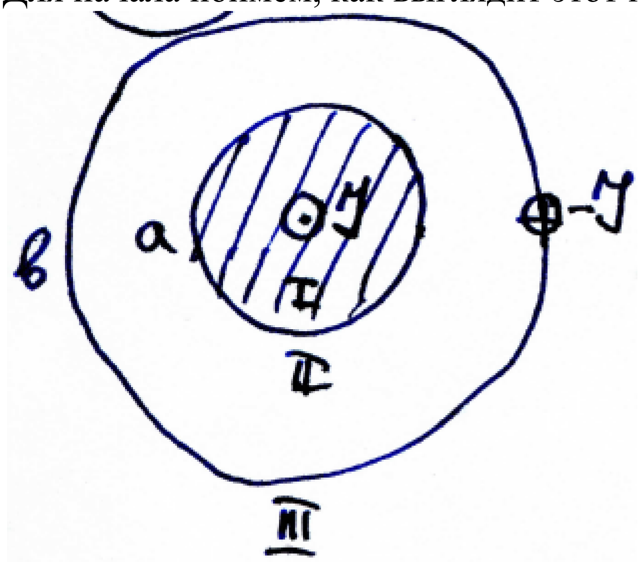
Алгоритм вычисления индуктивности – сначала вынести энергию, подсчитав её через интеграл от $H^2$, а затем из формулы $W = LI^2/2c^2$ выразить L.

Применим алгоритм для 26.1:

# ЗАДАЧА 26.1

**26.1.** Вычислить коэффициент самоиндукции единицы длины коаксиального кабеля.

Для начала поймём, как выглядит этот коаксиальный кабель.




По внутреннему цилиндру радиусом a течёт ток I. Далее пустота, и по внешней цилиндрической поверхности (бесконечно тонкой) радиусом b течёт ток –I, т.е. равный по модулю и противоположный по направлению.

За счёт такой конструкции магнитного поля снаружи кабеля (при r>b) не будет. А внутри будет, и мы его вычисляли на 24 семинаре.

$H(r) = \frac{2I}{ca^2} r$, $0 \le r \le a$

$H(r) = \frac{2I}{cr}$, $a \le r < b$

А при r>=b поля уже нет.

Интеграл при 0<=r<=a от энергии на единицу длины будет

$$\int_0^a \frac{(H_\varphi^{I})^2}{8\pi} r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mathcal{J}^2}{4c^2}$$

Интеграл при a<=r<b от энергии на единицу длины будет

$$\int_a^b \frac{(H_\varphi^{II})^2}{8\pi} r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2} \ln \frac{b}{a}$$

Энергия на единицу длины будет

$$\frac{W}{l} = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2}\left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4}\right)$$

С другой стороны, $\frac{W}{l} = \frac{L/l \cdot I^2}{2C^2}$. Приравнивая энергию, подсчитанную разными способами, получаем индуктивность на единицу длины:

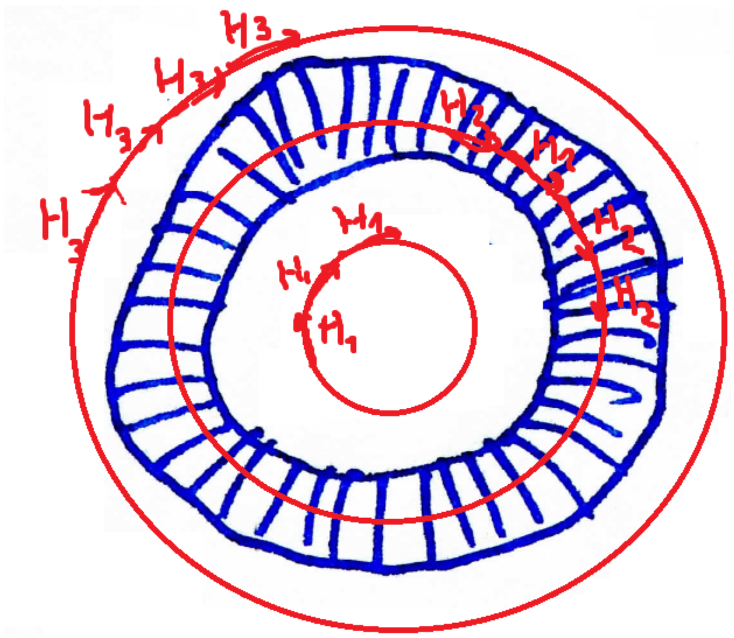
$$\frac{1}{2} + 2\ln\frac{b}{a}$$

.

# ЗАДАЧА 26.2

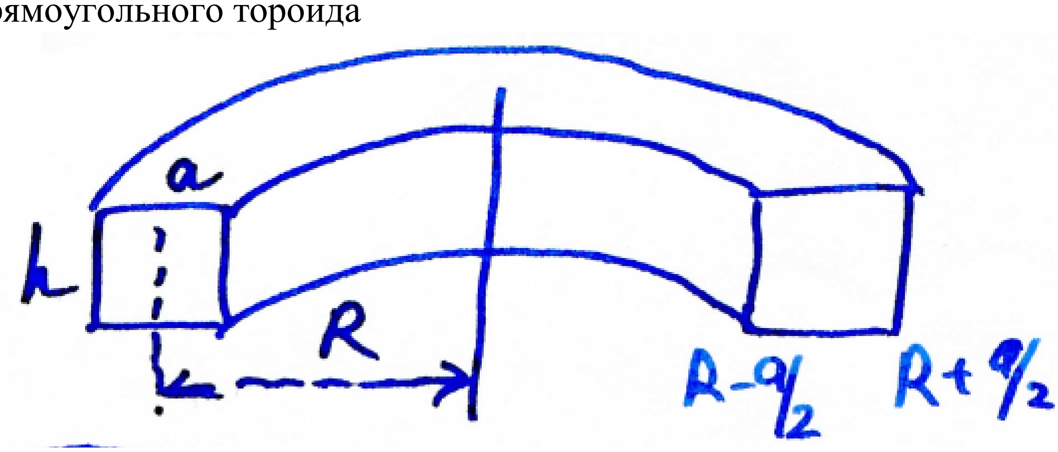
**26.2.** Вычислить индуктивность тороидального соленоида прямоугольного сечения; кругового сечения при $a \ll R$.

В школе вы наверняка выводили индуктивность обычного соленоида, не свёрнутого в тор, а тут его свернули.




Разобьём на три области. В первой $H_1(r)$ будет 0 (т.к. ток через маленькую окружность будет 0=>нулевая циркуляция H).
В третьей $H_3(r)$ будет 0 по тем же соображениям. А вот циркуляция $H_2(r)$ по средней окружности будет уже не 0, а I*N (N – число витков).
По теореме о циркуляции $H_2(r)*2\pi r$=(поток плотности тока, т.е. сам ток) I*N *4π/c => $H_2(r)=\frac{2NI}{cr}$.

Осталось найти полную энергию $\iiint\limits_V \frac{H^2}{8\pi}dV$. И тут проявляется разница в прямоугольном и круглом тороиде. Для прямоугольного тороида




И пределы интегрирования для подсчёта энергии будет

$$\mathcal{E} = \int \frac{H^2 dV}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}\int_{R-a/2}^{R+a/2} H(r)^2\, r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz$$

$$= \frac{N^2 J^2 h}{c^2} \ln\frac{2R+a}{2R-a} \underset{a\ll R}{\approx} \frac{N^2 J^2}{c^2}\frac{ha}{R}$$

Ну а далее вспоминаем, что $\boldsymbol{W = LI^2/2c^2}$, поэтому

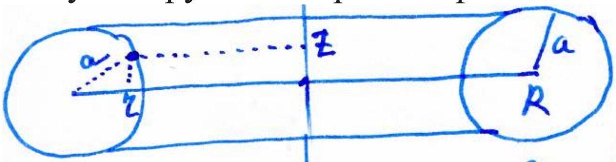
I -> I/c, j-> j/c

W=ЩI$^2$/2

$$\frac{N^2 I^2}{c^2} * \frac{ha}{R} = \frac{LI^2}{2c^2}$$

$$L = 2N^2 h \ln\frac{2R+a}{2R-a} \underset{a\ll R}{\approx} 2N^2\frac{ah}{R} = 2N^2\frac{S}{R}$$

В случае круглого тороида пределы интегрирования по z будут другие:




$$z = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$$

$$\mathcal{E}^{II} = \int \frac{H^2 dV}{8\pi} = \frac{4N^2 J^2}{8\pi c^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R-a}^{R+a} \frac{r\,dr}{r^2} \int_{-\sqrt{a^2-(R-r)^2}}^{\sqrt{a^2-(R-r^2)}} dz =$$

$$= \frac{2N^2J^2}{c^2}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x+R}\,dx \underset{a\ll R}{\approx} \frac{2N^2J^2}{c^2 R}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2 N^2 J^2}{Rc^2} = \frac{LJ^2}{2c^2}$$

$$L = \frac{2\pi a^2 N^2}{R} = \frac{2N^2 S}{R}$$

 $S = \pi a^2$

Если вдруг непонятно, как в середине третьей строчке пропал знаменатель x+r, то поясню: x по модулю не превосходит a, a<<R=>значит, и |x|<<R, и x+R мы заменили на R, вынеся R в коэф перед интегралом.

# ЗАДАЧА 26.3

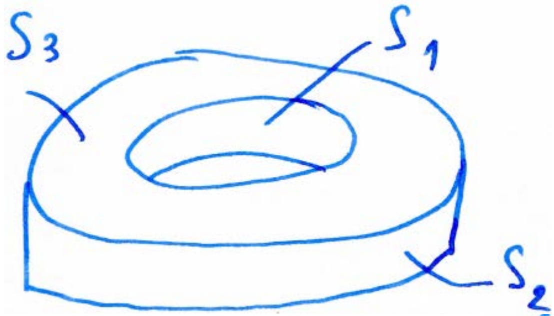
**26.3.** Найти давление на поверхность и силу (на единицу угла), действующую на обмотки тороидального соленоида с квадратным сечением, если по нему течет ток $J$, а полное число витков $N$.

Чтобы найти силы, продифференцируем энергии по a и h:

$$F_a = \frac{\partial \mathcal{E}^{II}}{\partial a} = \frac{N^2 y^2 h R}{(2R+a)(2R-a)}$$

$$F_h = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = \frac{N^2 y^2}{c^2} \ln \frac{2R+a}{2R-a}$$

А чтобы найти давление, нужно поделить силу на площадь.




$F_h$ действует на $S_3$ площадью $\pi(R+a/2)^2 - \pi(R-a/2)^2 = 2\pi R a$, поэтому

$$P_h = \frac{F_h}{S_3} = \frac{N^2 y^2}{2\pi R a c^2} \ln \frac{2R+a}{2R-a} \underset{a \ll R}{\approx} \frac{N^2 y^2}{4\pi R^2 c^2}.$$

$F_a$ действует на $S_1$+$S_2$ суммарной площадью

$2\pi h(R+a/2) + 2\pi h(R-a/2) = 4\pi R h$, поэтому

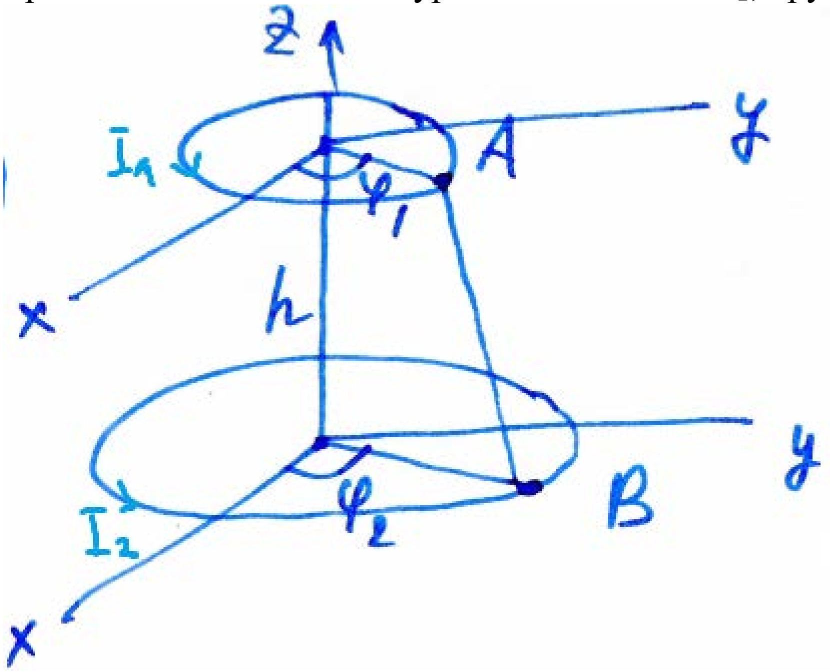
$$P_a \approx \frac{F_a}{4\pi R h} = \frac{N^2 y^2}{\pi c^2 (4R^2 - a^2)} \underset{a \ll R}{\approx} \frac{N^2 y^2}{4\pi R^2 c^2}.$$

А как насчёт взаимной индукции?

# ЗАДАЧА 26.5

**26.5.** Найти взаимную индукцию тонких коаксиальных колец с радиусами $a$ и $b$, лежащих в параллельных плоскостях. Расстояние между плоскостями $h$. Рассмотреть случай $h \gg a \sim b \gg r$, где $r$ — толщина провода.

Что же такое взаимная индукция (или взаимная индуктивность)?
Представим себе два контура – один с током $I_1$, другой с током $I_2$.




Какая энергия системы?

Конечно же, метод через поле всегда с нами:

$$\mathcal{E} = \int \frac{\vec{H}\vec{B}}{8\pi} dV \underset{\mu=1}{=} \int \frac{\vec{H}^2 dV}{8\pi}$$

Но будет верна и другая формула: $W=L_{12}I_1I_2/(2c^2)$.

$$W = \frac{L_{12}I_1I_2}{2c^2}$$

Здесь $L_{12}$ будет уже ***взаимная*** индукция.

Формула похожа на ту, которая у нас уже была

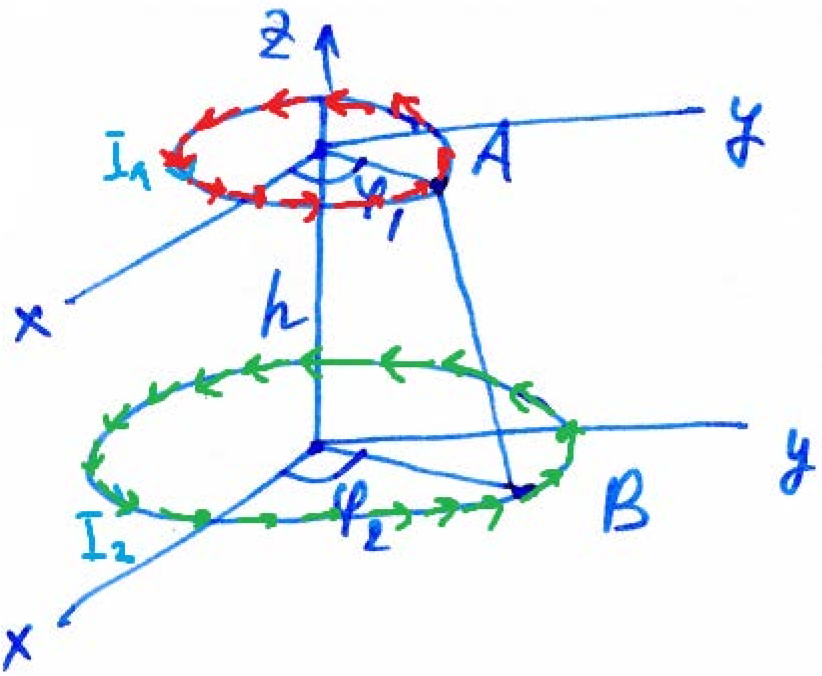
$$W = \frac{LI^2}{2c^2}$$

Но относится уже к 2 токам, а не 1.

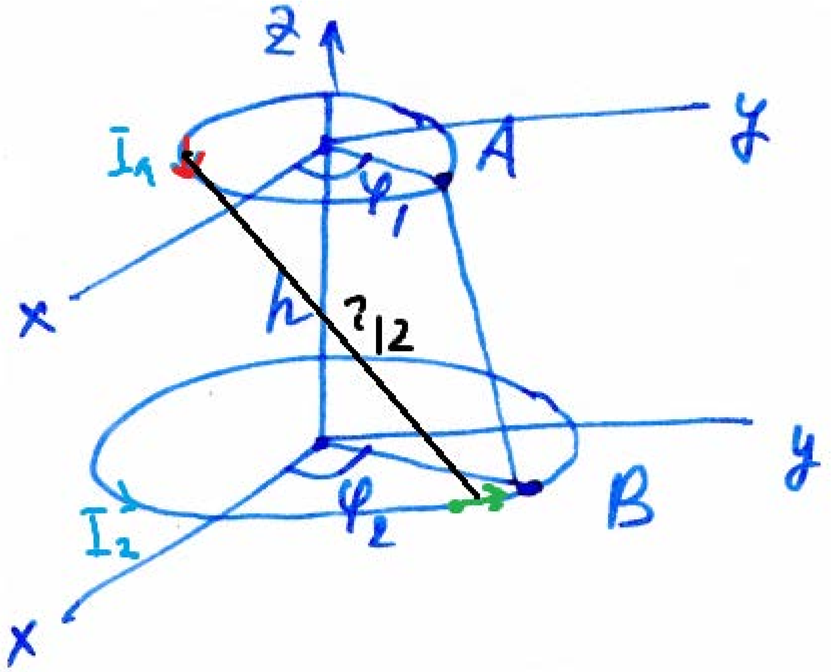
Метод с нахождением энергии двумя способами будет сложен, т.к. искать напряжённость будет сложно. Воспользуемся альтернативной формулой для взаимной индукции, которая использует лишь геометрию:

$$L_{12} = \oint\oint \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

Что она означает? Разобьём два контура на множество маленьких направленных отрезков – первый на $dl_1$, второй на $dl_2$.




Возьмём любые два из них:




Их скалярно умножим, поделив на расстояние $r_{12}$ между ними. Проделаем такую операцию для всевозможных пар зелёных и красных отрезков и получим взаимную индукцию.

Дальнейшее решение задачи сводится к вычислению интеграла. Введём углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ как на рисунке. Тогда скалярное произведение будет $\mathbf{dl_1 dl_2}$= $dl_1 dl_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = ab\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\, d\varphi_1 d\varphi_2$. Расстояние будет подсчитать сложнее. Нам поможет трёхмерная теорема Пифагора:

$$A = A(a\cos\varphi_1, a\sin\varphi_1, h)$$
$$B = B(b\cos\varphi_2, b\sin\varphi_2, 0)$$
$$r_{12}^2 = r_{AB}^2 = (a\cos\varphi_1 - b\cos\varphi_2)^2 + (a\sin\varphi_1 - b\sin\varphi_2)^2 + h^2$$
$$r_{12} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + h^2}$$

Вы только посмотрите, какой «красивый» интеграл нам сейчас потребуется взять!

$$L_{12} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1\, d\varphi_2 \;\frac{\cos(\varphi_2-\varphi_1)\,ab}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\varphi_2-\varphi_1)+h^2}}$$

М-да. Надо воспользоваться тем, что $h \gg a, b$. Сделаем так:

$$L_{12} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1\, d\varphi_2 \;\frac{\cos(\varphi_2-\varphi_1)\,ab/h}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{h}\right)^2-\frac{2ab}{h^2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)}+1}}$$

А далее воспользуемся тем, что $x \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \to 1 - \frac{x}{2}$, где в роли x $\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{h}\right)^2-\frac{2ab}{h^2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)$. Получим

$$\frac{ab}{h}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1\, d\varphi_2 \cos(\varphi_2-\varphi_1)\left(\mathrm{const} + \frac{ab}{h^2}\cos(\varphi_2-\varphi_1) + \dots\right)$$

где в роли const какая-то мешанина из a,b,h, не зависящая от $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Она при интегрировании убьётся (потому что $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1\, d\varphi_2 \cos(\varphi_2-\varphi_1) = 0$), и останется лишь интеграл от квадрата косинуса

$$\frac{a^2b^2}{h^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi_1-\varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2$$

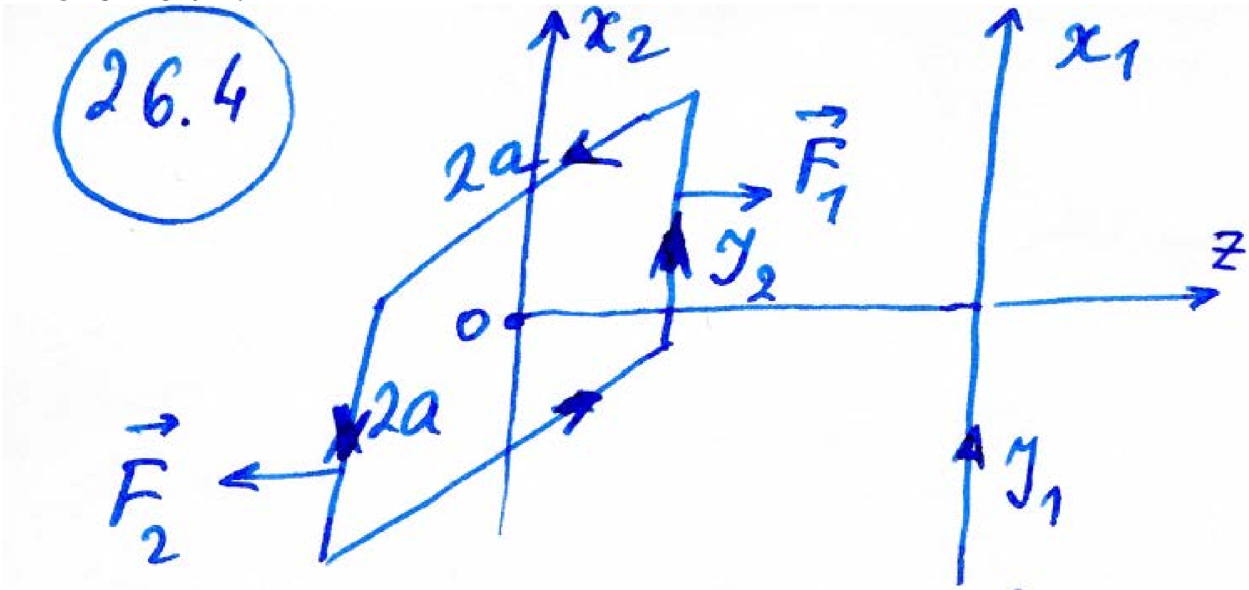
, который равен

$$\frac{2\pi^2 a^2 b^2}{h^3} = \frac{2 S_1 S_2}{h^3}$$

.

# ЗАДАЧА 26.4

**26.4.** Вычислить энергию взаимодействия прямого провода с током $J_1$, параллельного оси $x$, и квадратной рамки с током $J_2$. Провод параллелен двум сторонам рамки, но лежит вне плоскости рамки. Длина стороны рамки $2a$, ее центр масс имеет координаты $\{0, y_0, z_0\}$. Найти взаимную индукцию $L_{12}$, силу и момент силы.

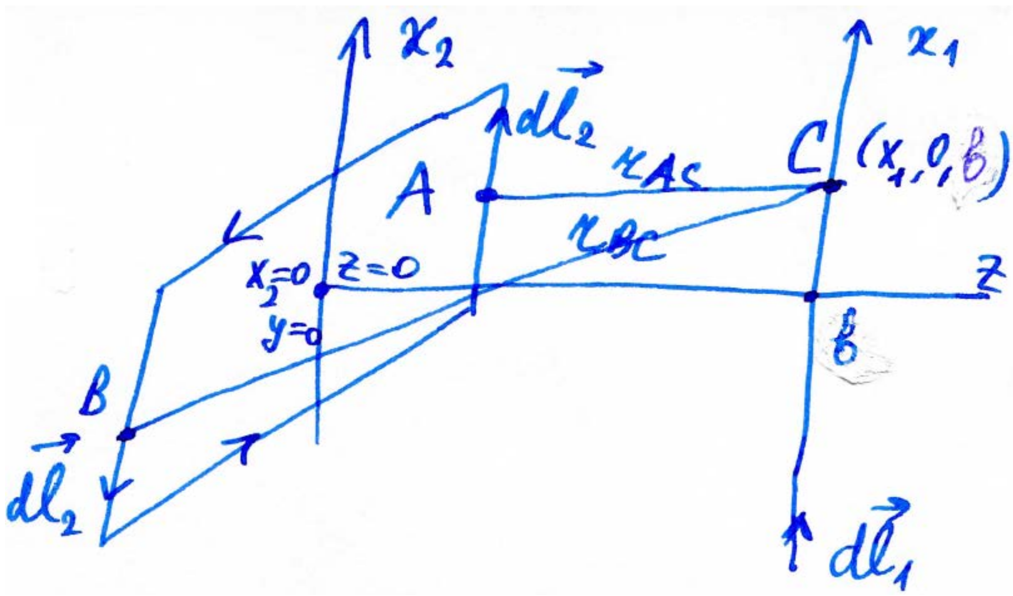



Давайте найдём взаимную индукцию $L_{12}$. Как только мы найдём, сразу применим формулу $W=L_{12}I_1I_2/(2c^2)$ и найдём энергию.

А взаимную индукцию вновь мы будем искать по формуле

$$L_{12} = \oint\oint \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

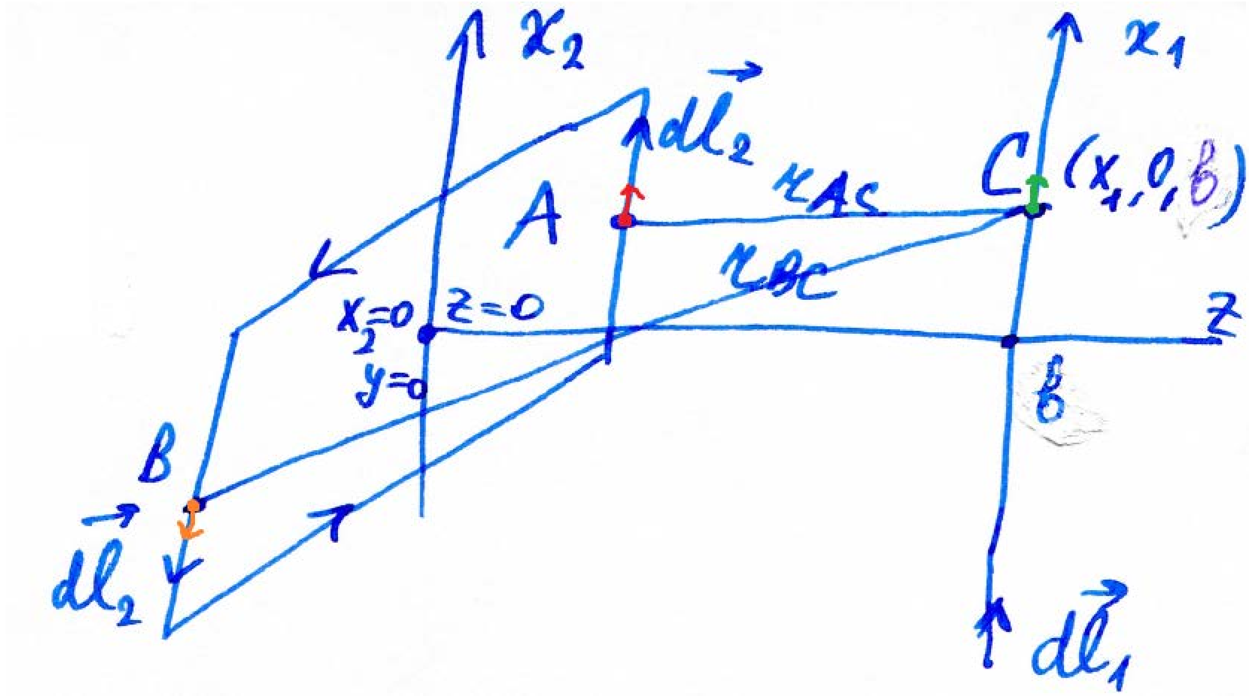
Глядя на эту формулу, заметим, что вертикальный провод никак не взаимодействует с горизонтальными сторонами квадрата, потому что скалярное произведение вертикали и горизонтали даст =0 ( $d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 = 0$ ). Так что будем искать лишь взаимодействие с вертикальными сторонами квадрата.




Каждая точка С вертикального провода взаимодействует с каждыми точками А и В вертикальных сторон. Давайте интегрировать!

$x_1$ – высота куска бесконечного вертикального провода

$x_2$ – высоты кусков вертикальных сторон квадрата:




Зелёная стрелка находится на высоте $x_1$, красная и оранжевая – на одной и той же высоте $x_2$.

$x_2$ меняется от -∞ до +∞, $x_2$ от –а до а:

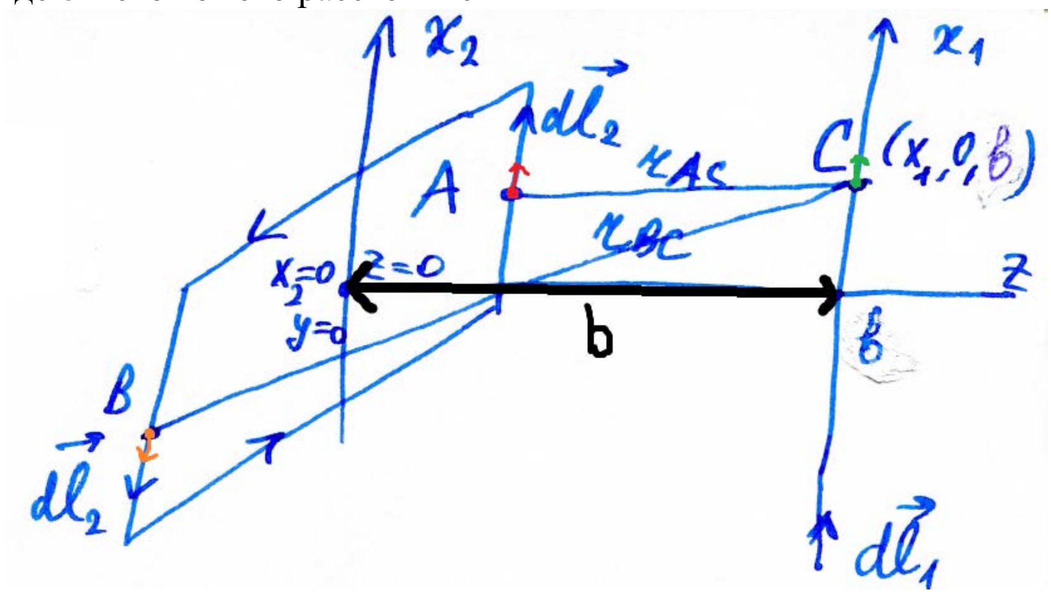
$$I_{12} = \oint\oint \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r_{12}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-a}^{a} dx_2 \left( \frac{1}{r_{AC}} - \frac{1}{r_{BC}} \right)$$

$1/r_{AC}$ с плюсом, т.к. красный вектор сонаправлен зелёному, а $1/r_{BC}$ с минусом, т.к. оранжевый вектор противонаправлен зелёному. Мы направляем векторы по току, если что!

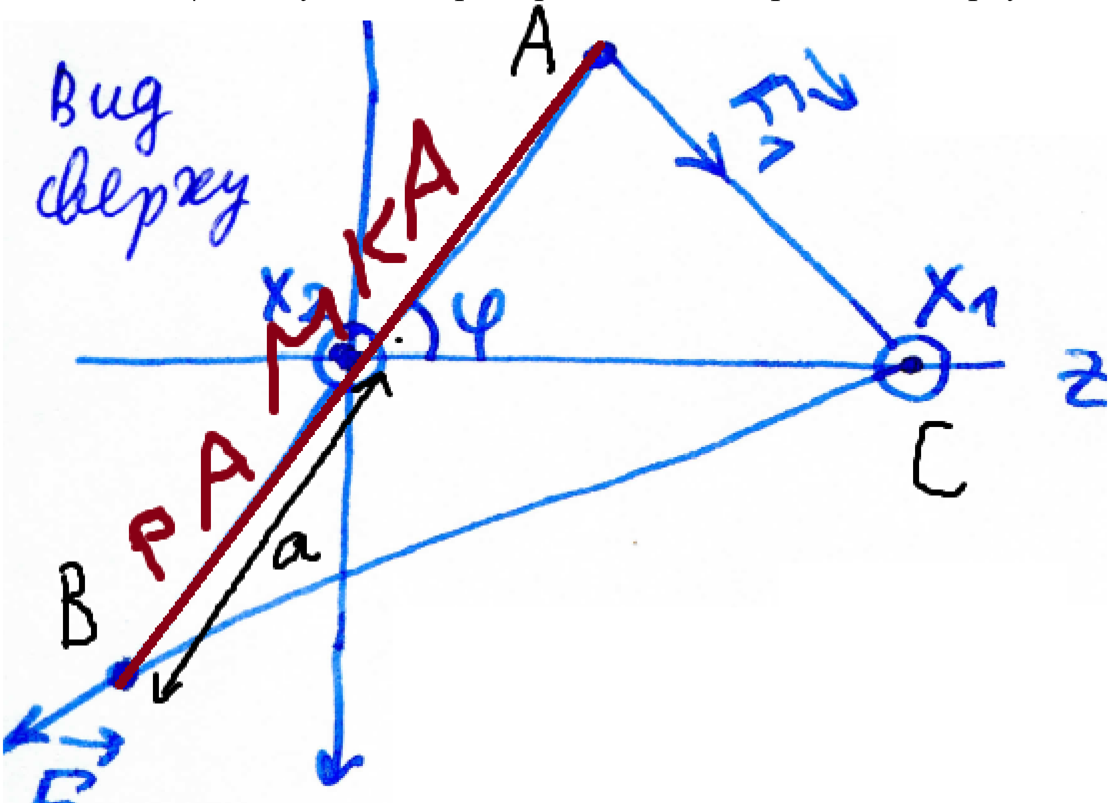
Давайте считать интеграл, а для этого найдём расстояния AC и BC.
Координаты точек A,B,C:

$$A\ (x_2,\ -a\sin\varphi,\ a\cos\varphi)$$
$$B\ (x_2,\ a\sin\varphi,\ -a\cos\varphi)$$
$$C\ (x_1,\ 0,\ b)$$

где b – это вот это расстояние




А что такое φ? Это угол поворота рамки. Посмотрите вид сверху:




Тогда, зная координаты A,B и C, найдём AC и BC по теореме Пифагора:

$$r_{AC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a sin\varphi)^2 + (b - a cos\varphi)^2}$$
$$r_{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a sin\varphi)^2 + (b + a cos\varphi)^2}$$

Тем мы готовы считать интеграл!

Пусть $x_1 = x_2 + t$ и $dx_1 = dt$:

$$L_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-a}^{a} dx_2 \left( \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}} \right)$$

$\int_{-a}^{a} dx_2 = 2a$ , также изменим пределы интегрирования с -∞ до +∞ на с 0 до +∞ , воспользовавшись чётностью функции:

$$= 2 \cdot 2a \int_{0}^{\infty} dt \left( \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2 + 2ab\cos\varphi}} \right) =$$

$$= 4a \ln \left| \frac{t + \sqrt{t^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}}{t + \sqrt{t^2 + a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}} \right|_{0}^{\infty} = 2a \ln \left| \frac{b^2 + 2ab\cos\varphi + a^2}{b^2 - 2ab\cos\varphi + a^2} \right|$$

Теперь считаем энергию:

$$W = \frac{L_{12} I_1 I_2}{2c^2} = 2a ln \left( \frac{a^2 + 2ab cos\varphi + b^2}{a^2 - 2ab cos\varphi + b^2} \right) \frac{I_1 I_2}{2c^2}$$
$$= \frac{a I_1 I_2}{c^2} ln \left( \frac{a^2 + 2ab cos\varphi + b^2}{a^2 - 2ab cos\varphi + b^2} \right)$$

Чтобы подсчитать момент силы, подсчитаем производную энергии по углу:

$$M = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{a I_1 I_2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} ln \left( \frac{a^2 + 2ab cos\varphi + b^2}{a^2 - 2ab cos\varphi + b^2} \right)$$

А силу – производную энергии по расстоянию b от центра рамки до вертикального провода:

$$F = \frac{\partial W}{\partial b} = \frac{a I_1 I_2}{c^2} \frac{\partial}{\partial b} ln \left( \frac{a^2 + 2ab cos\varphi + b^2}{a^2 - 2ab cos\varphi + b^2} \right)$$

Производные, надеюсь, сами вычислите ☺